

# УЧЕБНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАВИТАЦИИ (Ч. II)

Борисов Ю. А., e-mail: [bor1946@rambler.ru](mailto:bor1946@rambler.ru)

Волжский филиал Марийского государственного технического университета, г.Волжск,  
Республика Марий Эл

**Аннотация:** В отличие от традиционного, показан иной путь интегрирования для получения уравнения напряженности гравитационного поля в точке на удалении от модельного однородного шарообразного тела. Доказано его соответствие закону всемирного тяготения при проведении компьютерного суммирования. Обнаружено наличие максимального вклада элементов шарообразного тела в величину напряженности гравитационного поля в исследуемой точке вне этого тела. Получена аналитическая зависимость глубины положения этих элементов внутри шарообразного тела от высоты исследуемой точки над поверхностью тела и его радиуса.

**Ключевые слова:** Закон всемирного тяготения. Интегрирование. Компьютерное суммирование.

Во второй части учебных исследований мы использовали интегрирование и вызванное необходимостью компьютерное суммирование, что поэтапно приведено ниже. В исследованиях принимали участие студенты В.А. Арефьева и В.В. Трутнева.

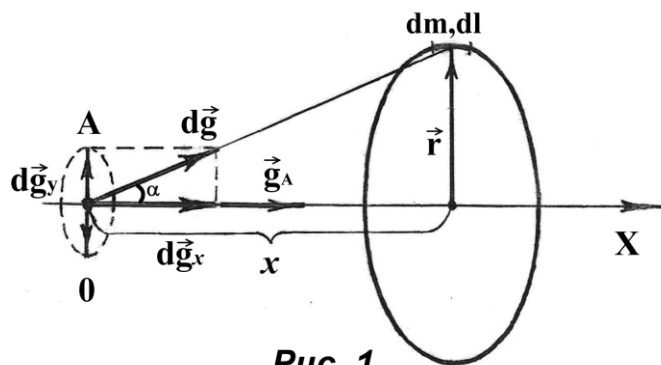


Рис. 1

1. Рассмотрим кольцо радиуса  $r$ , которое имеет массу  $m$ . Найдем ускорение силы тяжести  $\vec{g}$  или напряженность гравитационного поля, далее просто «напряженность», которую создает эта масса на расстоянии  $x$  от этого кольца на его оси [1]. Возьмем элемент кольца длиной  $dl$ , который имеет массу  $dm$ . Напряженность, создаваемая этим элементом  $d\vec{g} = \vec{G} \frac{dm}{r^2 + x^2}$  (1). Этот вектор можно разложить на две составляющие (см. рис 1).

Составляющие  $d\vec{g}_y$  каждого из двух взаимно противоположных элементов взаимно уничтожаются. Тогда модуль  $g_x = \int dg_x$ . Составляющая  $dg_x = dg \cdot \cos \alpha = dg \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$  (2). Из

(2) и (1) получим:  $dg_x = \frac{G \cdot x \cdot dm}{\sqrt{(r^2 + x^2)^3}}$ , откуда:  $g_x = \frac{G \cdot x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^m dm$  (3). Это и есть

напряженность в точке А, т.е  $g_x = g_A$ , или  $g_A = \frac{G \cdot x \cdot m}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$  (4).

2. Рассмотрим диск радиусом К который имеет массу  $m$  и плотность  $\rho$ .

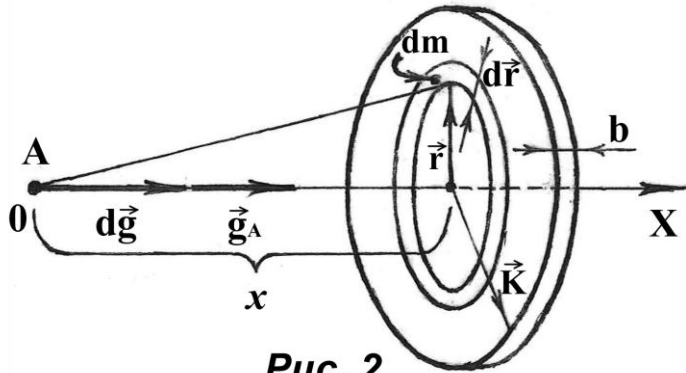


Рис. 2

Определим модуль напряженности на оси диска в точке А  $g_A$  как функцию расстояния  $x$  вдоль его оси (Рис2). Пусть толщина диска  $b$  будет во много раз меньше его радиуса К. Диск разобьем на кольца. Кольцо радиуса  $r$  шириной  $dr$  имеет массу  $dm$  и создает напряженность

$dg$ . Тогда  $dm = \rho dV = \rho b 2\pi r \cdot dr$  (5). Из (4) и (5) получим:  $dg = \frac{G \cdot x \cdot dm}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{G\rho \cdot xb \cdot 2\pi r \cdot dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$  (6).

Из (6), проводя интегрирование, получим:

$$g_A = \int_g dg = G\rho xb \pi \int_0^K \frac{2r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = G\rho xb \pi \int_0^K \frac{dr^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}} =$$

$$= G\rho xb \pi \frac{(r^2 + x^2)^{-3/2+1}}{-3/2+1} \Big|_0^K = G\rho xb 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{K^2 + x^2}}\right) \quad (7).$$

3. От диска перейдем к шарообразному однородному телу – модели планеты. Для расчета напряженности надо тело разбить на диски. Точка А находится на оси дисков на расстоянии  $h$

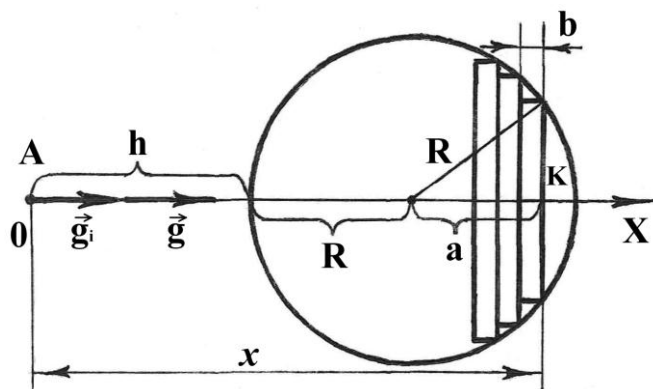


Рис. 3

от поверхности шарообразного тела радиуса R. В формуле (7)  $b$  будет равно шагу суммирования, а при интегрировании  $b = dx$ . Радиус дисков К для шарообразного тела зависит

от X. По рис. 3 выразим K:  $K^2=R^2-a^2$ ;  $a=(x-h)-R$ ; откуда  $K^2=R^2-[(x-h)-R]^2=R^2-(x-h-R)^2$ .

Тогда формула (7) преобразуется:  $dg = G\rho 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x-h-R)^2 + x^2}}\right) dx$  (8).

Результатом интегрирования этого уравнения (по закону всемирного тяготения) должно быть:

$$g = G\rho 2\pi \int_h^{h+2R} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x-h-R)^2 + x^2}}\right) dx = \frac{G\rho 4\pi R^3}{3(R+h)^2} \quad (9).$$

Но взять интеграл по уравнению (9) на данном этапе исследований мы не смогли, поэтому предприняли компьютерное суммирование в программе MS Excel, изложенное в пункте 4, что и привело к важному результату. Затем интеграл был взят, но ввиду большого объема изложения мы материал здесь не приводим.

4. Для суммирования использовали уравнение  $g_c = G\rho 2\pi b \sum_{x=h}^{x=h+2R} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x-h-R)^2 + x^2}}\right)$

(10), результат суммирования по которому сравнивали с результатом по уравнению:

$$G_{ц} = \frac{G\rho 4\pi R^3}{3(R+h)^2} \quad (11).$$

Расчет по уравнению (10) при шаге суммирования  $b=1$  мм,  $R=45$  мм,

$h=25$  мм и изменении  $x$  от  $x=h=25$  мм до  $x=h+2R=115$  мм,  $G \cdot \rho = 1$  значение (в условных единицах)  $g_c=77,975979$  ед., а по формуле (11)  $g_{ц}=77,898857$  ед. При уменьшении шага суммирования точность повышается. Так при шаге суммирования  $b=0,1$  мм сравниваемые значения, уже будут  $g_c=77,898462$  ед,  $g_{ц}=77,898857$  ед. Т.е можно считать, что  $g_c=g_{ц}$ . Далее, чтобы это доказать точнее, исследовали зависимость  $g_c$  от  $h$ . Расчетные данные приведены в таблице и на рис. 4.

Таблица: (при  $R=32$  мм,  $b=2$  мм,  $G \cdot \rho = 1$ )

h	0	16	32	48	64
h + R	32	48	64	80	96
(ф-ла 10) $g_c$	128,204	59,311	33,438	21,412	14,873
(ф-ла 11) $g_{ц}$	134,042	59,574	33,510	21,447	14,894
Разность $g_{ц} - g_c$	5,838	0,263	0,072	0,034	0,020

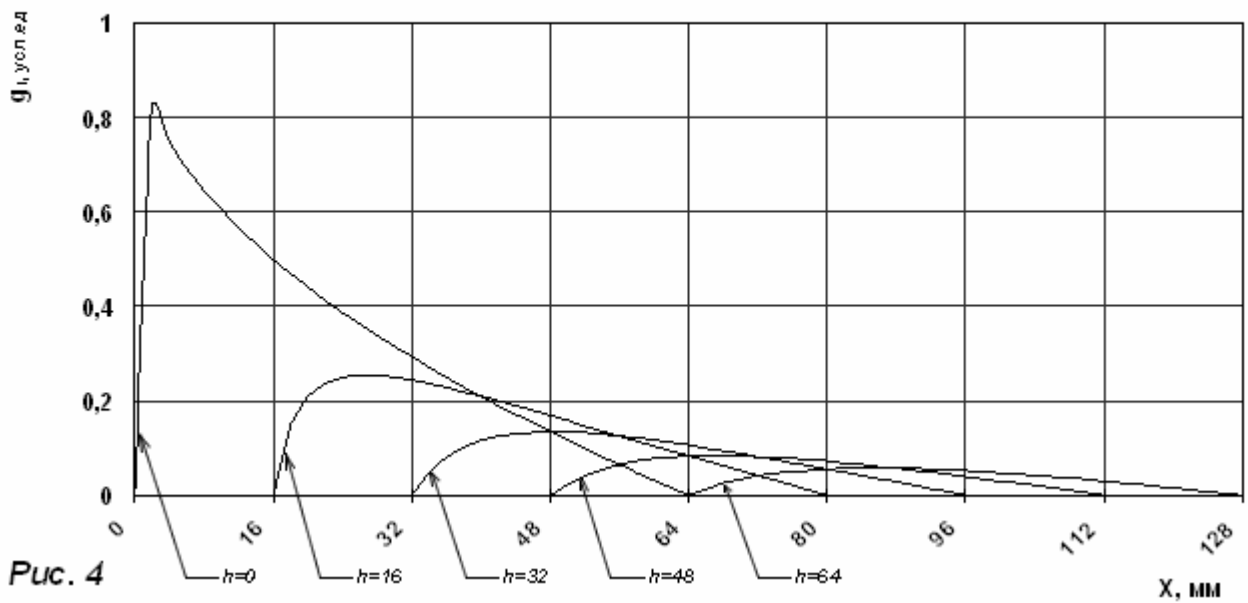


Рис. 4

Из рисунка 4 видно, что при нашей методике проведения суммирования – от дисков, наблюдается наличие максимального вклада  $g_{i \max}$  в значение напряженности (ускорения) от элементов сферического тела. Причем положение максимумов смещается к центру сферического тела при увеличении расстояния  $h$ . Как показывает анализ, положение этих дисков (рис 5) определяется касательными, проведенными из точки А, или глубиной  $L$  от поверхности шарообразного тела на отрезке АС.

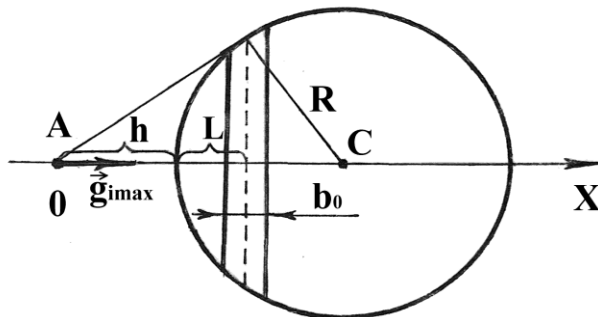


Рис. 5

Из рис 5 можно получить, что величины  $h$ ,  $L$  и  $R$  связаны уравнением: 
$$\frac{1}{L} = \frac{1}{h} + \frac{1}{R} \quad (12),$$

откуда можно определить  $L = \frac{hR}{h+R}$  (13). Уравнение (12) удовлетворяет очевидным граничным условиям. Так, при  $h=0$  также  $L \rightarrow 0$ . И это давно известно для Земли в общей физике и геодезии; а при  $h \rightarrow \infty$ , или  $h \gg R$ ,  $L=R$ , т.е диск, определяющий  $g_{i \max}$  проходит через центр сферического тела, и имеет самый большой диаметр, поэтому дает максимальный вклад, что также является очевидным. Вывод уравнения (13) можно выполнить путем анализа экстремума уравнения (8).

Таким образом, использование компьютерного суммирования позволило обнаружить неизвестное ранее явление максимального вклада элементов модельного шарообразного

однородного тела в величину напряженности гравитационного поля в исследуемой точке вне этого тела. Получена аналитическая зависимость глубины положения этих элементов внутри шарообразного тела от высоты исследуемой точки над поверхностью тела и его радиуса.

В целом, в отличие от традиционного показан иной путь интегрирования для получения уравнения напряженности гравитационного поля в точке на удалении от шарообразного тела. Уравнение соответствует закону всемирного тяготения, что доказывает правомерность использованного подхода.

В настоящее время [2-4] гравитационное поле планеты обычно представляют в виде шаровых функций, т.е. планету разбивают на шаровые поверхности. Массу каждой шаровой поверхности после интегрирования рассматривают сосредоточенной в ее центре. Интегрирование по объему планеты сводится к интегрированию шаровых поверхностей и приводит к сосредоточению массы планеты в ее центре, т.е. к традиционным представлениям о гравитационном поле планеты. Таким образом, обнаруженный нами эффект в литературе не рассматривается и является новым.

В геодезии различают два типа задач. Один тип – определение гравитационных характеристик поля планеты по структуре элементов Земли; другой тип – получение данных о структурных элементах Земли, например, поиск полезных ископаемых по данным гравитации. И это в большей мере используется для изучения лишь поверхностных структур Земли. Ранее такое изучение проводилось научными экспедициями, в том числе океанографическими (например, поиск нефти). Затем стали использовать ИСЗ. Полученные нами результаты помогут в проведении подобных исследований и в особенности глубинных структур Земли с помощью ИСЗ.

Литература:

1. В.В. Волькенштейн. //Сборник задач по общему курсу физики. Изд 3-е, испр. и доп. – СПб. Книжный мир, 2007, № 2.143.
2. В.Л. Пантелеев. //Физика Земли и планет. МГУ им. М.В. Ломоносова. Физический факультет. Курс лекций. - М:2001. <http://www.astronet.ru/db/msg/1169697> .
3. В.Л. Пантелеев. //Теория фигуры Земли. МГУ им. М.В. Ломоносова. Физический факультет. Курс лекций. - М:2000. <http://www.astronet.ru/db/msg/1169819> .
4. В.К. Хмелевский. //Геофизические методы исследования земной коры. Ч.1. Международный университет природы, общества и человека. «Дубна»- 1997. <http://www.astronet.ru/db/msg/1173309> .

## **Research work of the law of universal gravitation (Part II).**

**Borisov Y., e-mail: bor1946@rambler.ru**

**Volzhsk department of Mari State Technical University, Volzhsk city Republic of Mari El.**

The summary: In difference from traditional, other way of integration for reception of the equation of intensity of a gravitational field in a point on removal from a modeling homogeneous spherical body is shown. Its conformity to the universal gravitation law is proved at carrying out of computer summation. The phenomenon of the maximum contribution of elements of a spherical body unknown earlier in size of intensity of a gravitational field in an investigated point out of this body is revealed. Analytical dependence of depth of position of these elements in a spherical body from height of an investigated point over a surface of a body and its radius is received.

The key words: The law of universal gravitation. Integration. Computer summation.